



**Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem  
Marosvásárhelyi Kar**

**Felvételi, 2024 július**  
**- Alapképzés, matematika tétel -Javító kulcs**  
**A. variáns**

Minden tétel kötelező. Hivatalból 10 pont jár. Munkaidő 3 óra.

**I. Tétel (30 pont)**

1. Határozd meg az  $1, 7, 13, 19, \dots$  sorozat huszadik tagját!

**Megoldás.**  $a_1 = 1, a_2 = 7 \Rightarrow r = 6, \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19 \cdot r = 1 + 19 \cdot 6 = 115$ .

2. Számítsd ki a  $r = \frac{f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3)}{f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)}$  értéket ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - 2x$ .

**Megoldás.**  $f(2) = 0 \Rightarrow$  a tört értéke nulla.

3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $3^{2x+1} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$  egyenletet!

**Megoldás.**  $3^{2x+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow 2x + 1 = -2, x = -\frac{3}{2}$ .

4. Oldd meg az  $x + 1 \geq \sqrt{4 - x}$  egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

**Megoldás.** A létezési feltételekből  $(x + 1 \geq 0, 4 - x \geq 0) \Rightarrow x \in [-1, 4]$ . A  $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  lehetséges értékek közül csak  $x = 1, x = 2, x = 3$  és  $x = 4$  teljesíti a feltételt (tesztelés).

5. Határozd meg egy konvex nyolcszög átlóinak a számát!

**Megoldás.** Minden csúcsból  $(8 - 3)$  átló húzható, tehát összesen  $8 \cdot (8 - 3)$ , de duplán jelennek meg  $\Rightarrow \frac{8 \cdot (8 - 3)}{2}$

6. Az  $ABC_{\triangle}$ -ben  $AB = 9, AC = 8$  és  $m(\hat{A}) = 60^\circ$ . Számítsd ki a  $BC$  oldal hosszát!



**Megoldás.** Koszinusz tétel.  $BC = \sqrt{73}$ .

## II. Tétel (30 pont)

1. A  $2 \times 2$ , egész elemű mátrixok halmazán adott az  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  mátrix.

(a) Határozd meg az  $a, b, c, d$  egész számokat ha  $A + 2I_2 = 0_2$ .

**Megoldás.**  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Számítsd ki a  $B$  mátrix determinánsát, ahol  $B = A - A^t$  és  $A^t =$  az  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mátrix transzponáltja!

**Megoldás.**  $\det B = \begin{vmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{vmatrix} = (b-c)^2$

(c) Igazold, hogy ha  $A + A^t = 2I_2$ , akkor az  $A - A^t$  mátrix determinánsa osztható 4-el.

**Megoldás.**  $A + A^t = 2I_2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - A^t) = \begin{vmatrix} 0 & 2b \\ -2b & 0 \end{vmatrix} = 4b^2 \div 4$

2. A valós számok halmazán értelmezzük az

$$x * y = (x - 4)(y - 4) + 4,$$

műveletet.

(a) Határozd meg a művelet semleges elemét!

**Megoldás.**  $x * e = e * x = x(x - 4)(e - 4) + 4 = x, (x - 4)(e - 4) + 4 = 0 \Rightarrow e = 5$ .

(b) Oldd meg a valós számok halmazán az  $x * x * x = x$  egyenletet!

**Megoldás.**  $\Leftrightarrow ((x - 4)^2 + 4) * x = x \Leftrightarrow (x - 4)^2(x - 4) + 4 = x, \Leftrightarrow ((x - 4)^2 - 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 3, 4, 5$ .

(c) Határozz meg olyan  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  számokat amire  $a * b \in \mathbb{N}$ .



**Megoldás.**  $a * b = (a - 4)(b - 4) + 4$  és legyen  $(a - 4) = \frac{m}{n}$ ,  $(b - 4) = \frac{n}{m}$ , ahol  $m, n$  relatív prím számok pl. 2, 3. Tehát  $a - 4 = \frac{2}{3}$ ,  $b - 4 = \frac{3}{2}$ , ahonnan  $a = \frac{14}{3}$ ,  $b = \frac{11}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .

### III. Tétel (30 pont)

1. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$  függvény.

(a) Számítsd ki az  $f$  függvény deriváltját!

**Megoldás.**  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$

(b) Határozd meg az  $f$  aszimptotáját!

**Megoldás.**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , tehát  $y = 0$  vízszintes aszimptota  $\pm\infty$  fele.

(c) Számítsd ki a függvény szélsőértékeit!

**Megoldás.**  $x_{\max} = 1$ ,  $f_{\max} = \frac{1}{3}$ ,  $x_{\min} = -1$ ,  $f_{\min} = -\frac{1}{3}$

2. Adott az  $(f_n)_{n \geq 0}$  sorozat:

$$f_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

(a) Számítsd ki az  $f_0$  és  $f_1$  értékét!

**Megoldás.**  $f_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$ ,  $f_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = 1 - \ln 2$ .

(b) A parciális integrálás módszerével igazold, hogy

$$f_n = \frac{1}{2(n+1)} + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+x)^2} dx.$$

**Megoldás.** Parciális integrálás.

(c) Az előbbi alpont segítségével igazold, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot f_n = \frac{1}{2}.$$



Megoldás.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot f_n = \frac{1}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n+1} \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

és

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n+1} \frac{1}{(1+x)^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n+1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$