



**Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar**

**Felvételi, 2025 szept.
- alapképzés, matematika Javítókulcs -
C. variáns**

A tételeket részletesen ki kell dolgozni. Hivatalból 10 pont jár. Munkaidő 3 óra.

I. Tétel (30 pont)

1. Számítsd ki a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani sorozat első három tagjának szorzatát ha $b_2 = 5$.

Megoldás: $b_1 = \frac{5}{q}, b_3 = 5q \Rightarrow b_1 b_2 b_3 = \frac{5}{q} \cdot 5 \cdot 5q = 125$.

2. Oldd meg az $e^x + \frac{2}{e^x} = 3$ egyenletet!

Megoldás: $t = e^x, t^2 - 3t + 2 = 0, \Rightarrow x = \ln 1 = 0, x = \ln 2$

3. Adottak a vektorok: $\vec{u} = -2\vec{i} + (a-1)\vec{j}, \vec{v} = (a-1)\vec{i} + a\vec{j}$. Határozd meg az a valós paramétert ha az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok merőlegesek!

Megoldás: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, (-2)(a-1) + (a-1)a = (a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 1$ **vagy** $a = 2$.

4. Mi a valószínűsége annak, hogy az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból, véletlenszerűen kiválasztott n számra teljesüljön az $2^n \geq 3n + 2$ egyenlőtlenség?

Megoldás: $n = 4$ és $n = 5$ igaz, tehát $P = \frac{2}{5}$

5. Számítsd ki az OAB_{Δ} háromszög területét ha $O(0,0), A(-2,4), B(2,0)$!



Megoldás: $T = \frac{1}{2}4 \cdot 2 = 4$

6. Oldd meg a $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet ha $x \in [0, 2\pi)$.

Megoldás: $\sin 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

II. Tétel (30 pont)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix.

(a) Számítsd ki az a valós számot amelyre $A^2 = a \cdot A$.

Megoldás: $a = 3$

(b) Számítsd ki az $(A - A^t)^{2025}$ mátrixokat, ahol A^t az A mátrix transzponáltja!

Megoldás: $(A - A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - A^t)^2 = -I_2$, $(A - A^t)^{2025} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Oldd meg a $X^5 = A$ mátrix egyenletet, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!

Megoldás: Keressük a megoldást $X = tA$ alakban. $X^5 = t^5 A^5 = t^5 3^4 A$ tehát $t^5 3^4 = 1$, ahonnan $t = 3^{-\frac{4}{5}}$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - x - y + 2$ műveletet.

(a) Igazold, hogy $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Megoldás: Ellenőrzés.

(b) Határozd meg azokat az x valós számokat amelyre $x * x \leq 5$.



Megoldás: $x^2 - 2x + 2 \leq 5, x \in [-1, 3]$

- (c) Számítsd ki az $1^n * 2^n * \dots * 2025^n$ értéket, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Megoldás: $1 * A = 1, \forall A \Rightarrow 1^n * 2^n * \dots * 2025^n = 1$

III. Tétel (30 pont)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ függvény.

- (a) Számítsd ki az f függvény deriváltját!

Megoldás: $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

- (b) Határozd meg a függvény monotonitását és szélsőértékpontjait!

Megoldás: f szig. csökkenő ha $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, és f szig. növekvő ha $x \in (0, \infty)$. $x_{min} = 0$.

- (c) Add meg az $\text{Im}(f)$ függvényértékek halmazát!

Megoldás: $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

- (d) Határozd meg az f függvény aszimptotáit!

Megoldás: $x = -1$ függőleges aszimptota. $y = 0$ vízszintes aszimptota $-\infty$ fele.

- (e) Határozd meg az f függvény grafikonjához húzott érintő egyenletét, amely átmegy az $A(0, 1)$ ponton!

Megoldás: $(y - 1) = 0(x - 0) \Rightarrow y = 1$.

- (f) Számítsd ki az

$$\int_0^1 (x+1)^2 f'(x) dx$$

integrált!



**Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar**

Megoldás: $\int_0^1 (x+1)^2 f'(x) dx = \int_0^1 x e^x dx = e^x x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$