



**Felvételi, 2025 július
- alapképzés, matematika megoldókulcs -**

A tételeket részletesen ki kell dolgozni. Hivatalból 10 pont jár. Munkaidő 3 óra.

I. Tétel (30 pont)

1. Számítsd ki az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani sorozat első három tagjának összegét ha $a_2 = 4$.

Megoldás: $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 - r + a_2 + a_2 + r = 12$.

2. Oldd meg az $e^{2x} + 2 = 3e^x$ egyenletet!

Megoldás: $e^x = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$, ahonnan $t = 1 \Rightarrow x = 0$, illetve $t = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

3. Adottak a vektorok: $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + (a^2 + 2)\vec{j}$. Határozd meg az a valós paramétert ha az $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektorok kollineárisak!

Megoldás: az $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektorok kollineárisak $\Rightarrow \vec{v} = k \cdot \vec{u}$ ($k = 3$), tehát $a^2 + 2 = 3a$, $\Rightarrow a = 1$, $a = 2$.

4. Egy 5 házból álló házsor szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van, és a szomszédos házak nem lehetnek egyforma színűek? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

Megoldás: Az első ház festéséhez használhatjuk bármelyiket a négy színből, a következő házat viszont már csak három színt használhatunk..., tehát $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ lehetőség.

5. Ha $A(-2, 0)$, $B(2, 5)$, $C(6, 2)$, akkor igazold, hogy az ABC_{Δ} területe nagyobb 15.8 egységnél!



Megoldás: Legyen $AMNP$ a (legkisebb) téglalap (az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel) amibe beírhatjuk az ABC háromszöget: $M(-2, 5), N(6, 5), P(6, 0) \Rightarrow T_{ABC} = T_{AMNP} - (T_{AMB} + T_{BNC} + T_{ACP}) = 8 \cdot 5 - \left(\frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 2}{2}\right) = 16 > 15.8$

6. Oldd meg a $(\cos x + 2 \sin x)^2 - 4 \cos x (\sin x - \cos x) = 5$ egyenletet ha $x \in [0, 2\pi)$.

Megoldás: $\cos^2 x + 4 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 5 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1, x = 0, x = \pi$

II. Tétel (30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok.

(a) Számítsd ki a $\det(A - A^t)$ determináns értékét, ahol A^t az A mátrix transzponáltja.

Megoldás: $\det \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ -14 & 0 \end{pmatrix} = 196$

(b) Számítsd ki az $A \cdot A \cdot A$, majd az A^{2025} mátrixokat!

Megoldás: $A^3 = I_2, A^{2025} = (A^3)^{675} = I_2$

(c) Határozd meg az $(m, n), m \neq n$ természetes számpárokat amelyekre $\det(A + mI_2) = \det(A + nI_2)$.

Megoldás: $\begin{vmatrix} 3+m & 13 \\ -1 & -4+m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+n & 13 \\ -1 & -4+n \end{vmatrix} \Rightarrow (m-n)(m+n-1) = 0 \Rightarrow (m, n) = (0, 1), (m, n) = (1, 0)$

2. Az $M = [0, \infty)$ halmazon értelmezzük az $x * y = x + y - \sqrt{xy}$ műveletet.

(a) Számítsd ki a $2 * 8$ művelet eredményét!



Megoldás: $2 * 8 = 6$

- (b) Határozd meg azokat az $x \in M$ elemeket, amelyekre teljesül az $x*(9x) = x^2$ egyenlőség!

Megoldás: $x + 9x - 3x = x^2$, $x(x - 7) = 0$, $x = 0$, $x = 7$.

- (c) Határozd meg azt az x valós számot, amelyre $2^x * 2^{x+2} = 6^x$.

Megoldás: $2^x + 4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 6^x$, $2^x(3^x - 3) = 0$, $\Rightarrow x = 1$.

III. Tétel (30 pont)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ függvény.

- (a) Igazold, hogy $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x)^2}$.

Megoldás: Ellenőrzés.

- (b) Számítsd ki az f függvény első és másodrendű deriváltját!

Megoldás: $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(1+x)^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{6}{(1+x)^4}$.

- (c) Határozd meg a függvény monotonitását és konvexitását!

Megoldás: $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ szig. csökkenő $x \in (0, \infty)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvex $x \in (0, \infty)$

- (d) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k)$ határértéket!

Megoldás: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(1+k^2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(1+n^2)} \right) = 1$

- (e) Határozd meg az f függvény F primitív függvényét amelyre $F(1) = 1$.



**Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar**

Megoldás: $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + c, F(1) = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}, F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \frac{3}{2}.$

(f) Számítsd ki az $\int_1^2 f(x)dx$ integrált!

Megoldás: $\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = \frac{1}{3}.$