



**Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar**

**Felvételi, 2026 szeptember
- alapképzés, matematika tétel Javítókulcs -
B. variáns**

A tételeket részletesen ki kell dolgozni. Hivatalból 10 pont jár. Munkaidő 3 óra.

I. Tétel (30 pont)

1. Számítsd ki a $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani sorozat első tíz tagjának összegét ha $a_2 = 7$, $a_4 = 4$.

Megoldás. $r = -\frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{17}{2}$. $S_{10} = a_1 + \dots + a_{10} = a_1 + \dots + a_1 + 9r = 10a_1 + 45r = \frac{35}{2}$

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 1$ függvény, $a \in \mathbb{R}$. Milyen a értékre teljesül az $f(a-2) = f(0) \cdot f(1)$ feltétel?

Megoldás. $a(a-2) - 1 = (-1)(a-1)$, $\Rightarrow a = 2$, illetve $a = -1$.

3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\ln(x+6) = \ln(x) + \ln(8-x)$ egyenletet!

Megoldás. Feltételek: $x+6 > 0$, $x > 0$, $8-x > 0$, $\ln(x+6) = \ln(x(8-x)) \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$, $\Rightarrow x = 1, x = 6$.

4. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy az egyjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott p számra teljesüljön a $2^{p+1} - 6 \in [0, 1000]$ feltétel!

Megoldás. Összes eset: 10, kedvező esetek: $p = 2, \dots, 8$, tehát $P = \frac{7}{10}$

5. Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(-6, 7)$, $B(9, -2)$ pontok. Ha M az AB szakasz közepe, igazold, hogy $OM \perp AB$, ahol $O(0, 0)$ az origó.

Megoldás. $M(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $m_{AB} = \frac{-9}{15}$, $m_{OM} = \frac{5}{3}$ és a szorzatuk $= -1$, tehát az egyenesek merőlegesek.



6. Igazold, hogy $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ egész szám!

Megoldás. A tört értéke: $\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0} = 2 \in \mathbb{Z}$

II. Tétel (30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 3a-3 & 3a-2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Igazold, hogy $3A(3) - 2A(2) = A(5)$.

Megoldás. $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} = A(5)$

(b) Számítsd ki a $A(2) \cdot (A(3) - I_2)$ mátrixot, ahol I_2 az egység mátrix.

Megoldás. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 24 & 30 \end{pmatrix}$

(c) Határozd meg az az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot amelyre $2X \cdot A(2) - A(2) = A(6)$

Megoldás. $(2X - I_2)A(2) = A(6) \Rightarrow 2X = I_2 + A(6) \cdot A(2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$, tehát $X = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - \frac{x+y}{2} + 3$ műveletet.

(a) Számítsd ki az $(-1) * 3$ értéket!

Megoldás. $(-1) * 3 = -3 - \frac{2}{2} + 3 = -1$

(b) Határozd meg azokat az x valós számokat amelyre $x * 3 = 2x$.

Megoldás. $3x - \frac{x+3}{2} + 3 = 2x \Rightarrow x = -3$.

(c) Határozd meg azokat az (m, n) természetes számpárokat, amelyekre

$$(m - n) * (m + n) = m^2.$$



Megoldás. $m^2 - n^2 - \frac{2m}{2} + 3 = m^2 \Rightarrow m + n^2 = 3$, aminek a (m, n) megoldása: $(3, 0)$, illetve $(2, 1)$

III. Tétel (30 pont)

Adott az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(1+x)^2}$ függvény.

1. Határozd meg az f függvény maximális értelmezési tartományát!

Megoldás. $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$

2. Számítsd ki a következő határértékeket:

$$L_1 = \lim_{x \nearrow 0} f(x), L_2 = \lim_{x \searrow 0} f(x), L_3 = \lim_{x \nearrow -1} f(x), L_4 = \lim_{x \searrow -1} f(x), \\ L_5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), L_6 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Megoldás. $L_1 = \infty, L_2 = \infty, L_3 = -\infty, L_4 = -\infty, L_5 = 0, L_6 = 0$

3. Határozd meg az f függvény aszimptotáit!

Megoldás. Függőleges aszimpt: $x = -1, x = 0$. Vízszintes aszimpt: $y = 0$.

4. Igazold, hogy $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ és számítsd ki a $L_7 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k)$ határértéket!

Megoldás. $L_7 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$

5. Számítsd ki a függvény elsőrendű deriváltját!

Megoldás. $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$

6. Számítsd ki az $I = \int_2^3 f(x)dx$ integrált!

Megoldás. $I = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)_2^3 = \frac{1}{12}$